

Kriging Tekniği ile Nokta ve Alansal Kestirim: Tenör Dağılımlarının Haritalanması Örneği

Bayram Ali MERT¹, Ahmet DAĞ^{*2}, Ali Can ÖZDEMİR²

¹İskenderun Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi, Petrol ve Doğalgaz Mühendisliği Bölümü, Hatay

²Çukurova Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Maden Mühendisliği Bölümü, Adana

Geliş tarihi: 13.06.2016

Kabul tarihi: 23.11.2016

Öz

Gözlemler arasındaki uzaklığa bağlı ilişki, varyansa dayalı olarak elde edilen variogram fonksiyonlarıyla değerlendirilebilmektedir. Mevcut ilişkilerin oluşturduğu ağırlıklardan hareketle kriging gibi çeşitli jeoistatistiksel araçlar geliştirilmiştir. Bu çalışmada, farklı disiplinlerde çoğunlukla da bilgisayar programları tarafından gerçekleştirilen ordinary kriging kestirim tekniği ile noktasal ve alansal tahminlerin hesabı bilgisayar kullanılmadan adım adım ele alınarak yapılmıştır. Çalışma kapsamında hipotetik olarak seçilmiş bir maden yatağına ait tenör verileri kullanılarak öncelikle örneklenmemiş bir noktanın ve alanın tahmini yapılmış, daha sonra maden yatağının tenör dağılımı tahmin edilmiş ve tüm tenör verileri kullanılarak haritalanmıştır. Temel kriging yaklaşımının kullanımı, özellikle saha çalışmalarına dayalı mühendislik ve fen bilimlerindeki modelleme çalışmalarında etkin bir araç olarak kullanımı artıracaktır.

Anahtar Kelimeler: Jeostatistik, Kriging, Variogram, Uzaysal analiz, Tenör Dağılımı

The Prediction of Point and Block Using Kriging Technique: A sample of Grade Distribution Mapping

Abstract

The semivariogram functions which are obtained as a result of the spatial dependency between samples and the kriging equations used for estimating unsampled point or area are used in many disciplines. Kriging is a complex procedure that requires greater knowledge about spatial statistics and the solutions of kriging equations are usually carried out with the help of computer programs. In this study, point and block estimations of the grade contents in a mineral deposit were made by taking step by step and without using a computer. In the scope of the study, firstly, unsampled point and block grade have estimated using grade samples of the mineral deposit which is hypothetically selected, and then the grade distribution of the mineral deposit have estimated and mapped using all the grade data. The use of the basic kriging approach will enhance its use as an effective tool, especially in modeling studies in engineering and science based on field studies.

Keywords: Geostatistics, Kriging, Variogram, Spatial analysis, Grade distribution

* Sorumlu yazar (Corresponding author): Ahmet DAĞ, ahmdag@cu.edu.tr

1. GİRİŞ

İlk olarak Krige [1] ve Matheron [2] tarafından maden yataklarının daha etkin değerlendirilebilmesi için geliştirilmiş olan, fakat Şu anda yerbilimcilerden halk sağlığı uzmanlarına kadar birçok farklı disiplinde yaygın olarak kullanılan jeoistatistik yöntemlerin temelinde Bölgesel Değişkenler Teorisi bulunmaktadır [3,4]. Bu teoride bölgesel değişken, bir noktadan bir başka noktaya süreklilik göstererek değişen olarak tarif edilmektedir. Bölgesel değişkenlerin tanımladığı noktalar arasındaki uzaklık ile bu noktalardaki gözlenen değerler arasındaki olası bir ilişki, normal olarak uzaklık azaldıkça değerlerin birbirine benzemesi, arttıkça benzerliğin azalması şeklinde beklenir. Başka bir deyişle bölgesel değişkenlerin değerleri arasındaki fark, bu değerler arasındaki uzaklığın bir fonksiyonu şeklinde tanımlanabilir [5-7]. Jeoistatistik bu türden bir yaklaşımdır ve klasik istatistik yöntemlerinden farklı olarak örnekler arası ilişkiyi örneklerin alındıkları koordinatları da hesaba katarak, uzaklığa ve yönlere bağlı değişimleri dikkate alır. Bu sayede yöntem maden yataklarının rezervlerinin tespitinde geniş bir kullanım alanı bulmuştur [8]. Poligon, üçgen ve kesit gibi geometrik rezerv hesaplama yöntemleri, ilgili kestirim alanı içinde tenör değerlerin değişmediği, dolayısıyla tenör değerleri arasındaki farkın, h uzaklığı ne olursa olsun, sifıra eşit olduğunu varsayar. Ancak bu gerçekçi bir yaklaşım değildir ve tenör değerleri arasındaki farkın gözlemler arasındaki uzaklık arttıkça artması, azaldıkça azalması beklenir. Jeoistatistiğin yanında bu mantıkla hareket eden diğer bir yöntemde ters uzaklık yöntemidir. Ters uzaklık yöntemiyle yapılan bir tahminde tahmini yapılacak nokta ve buna referans olacak örnekler arası uzaklığın haricinde hiçbir etken mesela cevher zonuunun zengin mi yoksa fakir mi olacağı veya yönlere göre tenörün nasıl değişime uğradığı göz önünde bulundurulmaz. Gerçekte uzaklığa bağlı ilişki aynı bir yatak içinde bile yönlere göre değişiklik gösterebilir. Dolayısıyla bu şekilde yapılan tahminlerde aşığıdaki sorular ortaya çıkacaktır.

i) Hangi fonksiyonun $1/d$, $1/d^2$, $1/d^3$, e^{-x} mi ya da vb. kullanılacağı?

- ii) Tahmini yapılacak noktanın ne kadar uzaklığındaki noktaların göz önünde bulundurulacağı?
- iii) Yapılan tahminin ne kadar güvenilir olduğu?
- iv) Aynı tahmin metodunu bütün yatak tiplerinde eşit derecede doğru sonuçlar vereceğini ciddi bir şekilde bekleyebilir miyiz?

Tenör değerleri arasındaki farkların uzaklığa bağlı bir modelinin oluşturulmasında en gerçekçi yaklaşım, ilgili yatağın verilerini kullanan ve yatağın özelliklerini yansıtan bir yaklaşımdır. Jeoistatistik bu türden bir yaklaşımdır ve tenör değerlerindeki farkların uzaklığa ve yönlere bağlı değişimlerini dikkate alır [9].

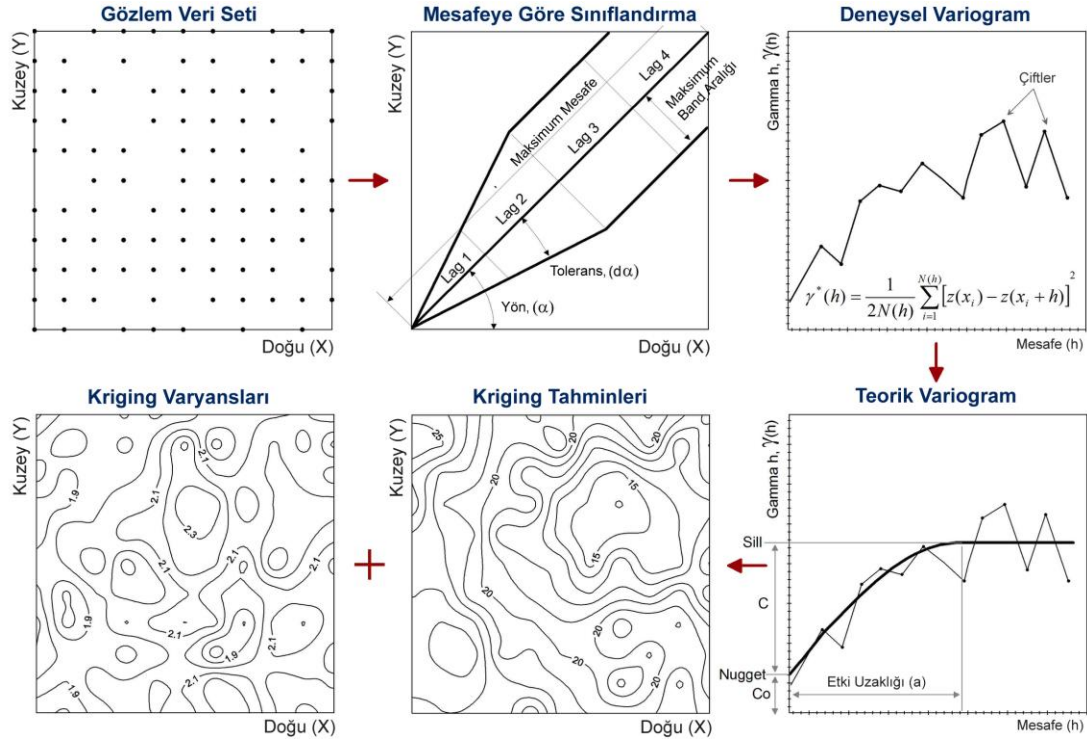
Jeoistatistik yöntemlerle yapılan bir analizi dört ana gruba ayırabiliriz. Bu gruplar ise;

- I. Yöresel değişkenin değerleri arasındaki farkların, uzaklığa bağlı değişimlerini belirlemeye yarayan yarıvariogram modellerinin tespit edilmesi,
- II. Yarıvariogram modellerinin test edilmesi,
- III. Kriging interpolasyon tekniği ile noktasal, alansal veya bir hacmi temsil eden kestirimlerin yapılması,
- IV. Yapılan kestirim hatalarının belirlenmesi (Şekil 1) şeklinde sayılabilir.

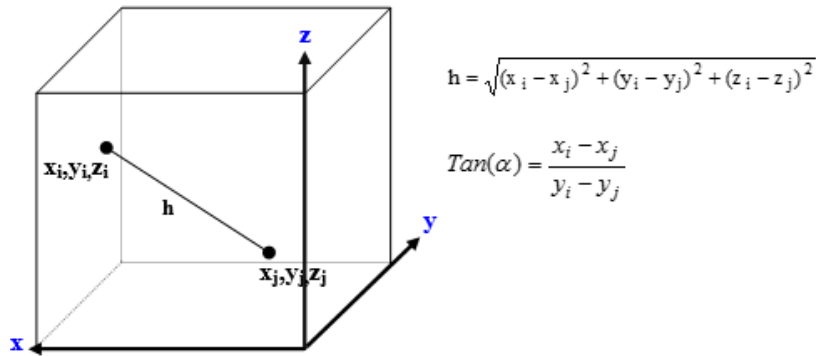
Jeoistatistiksel bir çalışmada bu unsurların hepsinin sistematik olarak yapılması gerekir [10]. Jeoistatistikte, bölgesel değişkenin değerleri arasındaki farkın uzaklığa bağlı değişimleri variogram fonksiyonu ile ortaya konur. Variogram fonksiyonu tesadüfi değişkenin değerleri arasındaki farkın varyansı şeklinde ifade edilir ve $2\gamma(h)$ ile gösterilir. Literatürde yarıvariogram olarak adlandırılan yarıvariogram fonksiyonu ise variogram fonksiyonunun yarısını ifade etmektedir ve $\gamma(h)$ ile gösterilir [11]. Yarıvariogram fonksiyonları yöresel değişkeninin ne gibi özellikler gösterdiğini belirlemede kullanılır. Örneğin, bu fonksiyon bilindiğinde değişkenin homojenlik ve izotropluk dereceleri, düzenliliği ve bir örneğin etkili olduğu uzaklık belirlenebilir. Yarıvariogram değerlerinin gözlemler arasındaki h uzaklığına bağlı olarak hesaplanabilmesi için N sayıdaki gözlemin $N(N-1)/2$ tane olan ikili

kombinezonları oluşturulur [3,12]. Oluşturulan gözlem çiftleri arasındaki h uzaklığı ve yön Şekil 2’de gösterildiği gibi koordinatlardan gidilerek pisagor bağıntısı ile hesaplanır. Eğer

gözlem çiftleri yön ve uzaklık gözetilmeksizin oluşturulmuşsa mümkün bütün çiftlerin arasındaki yarıvaryans değeri Eşitlik (1) yardımıyla hesaplanır.



Şekil 1. Jeostatistik analiz aşamalarının grafiksel gösterimi



Şekil 2. Üç boyutlu uzayda çiftler arası uzaklık ve yön hesabı

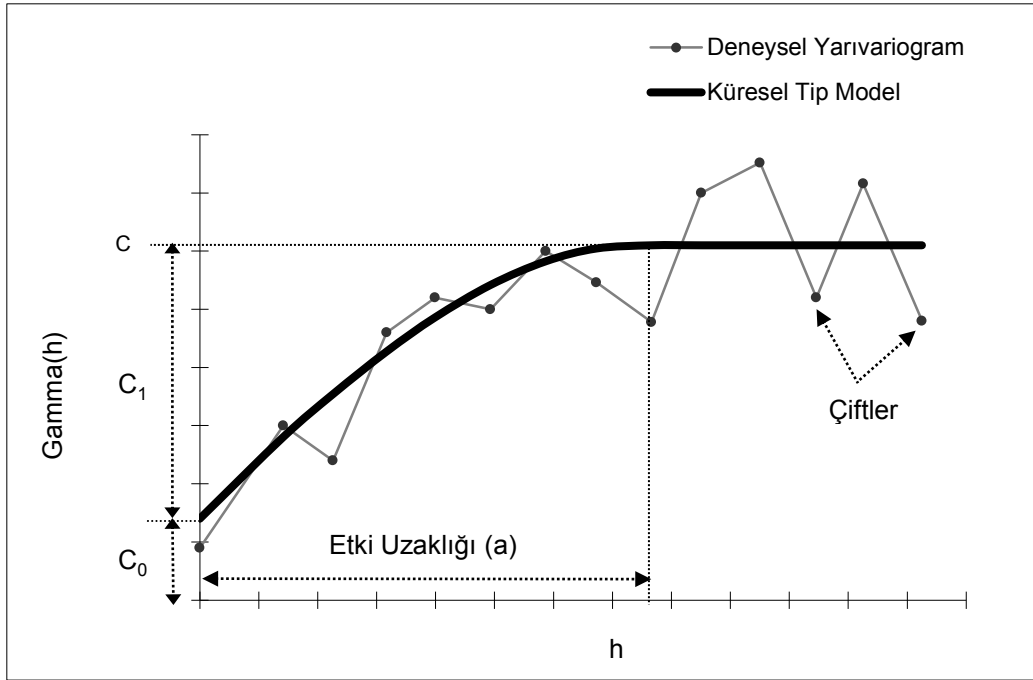
Daha sonra her bir h uzaklığına karşılık elde edilen deneysel yarıvaryans değerleri karşılıklı olarak grafiklenerek yarıvariogram fonksiyonu elde edilir (Şekil 3). Bu şekilde yön ve mesafe

gözetilmeksizin oluşturulan yarıvariogramlar yönsüz (omnidirectional) yarıvariogram ismini almaktadır.

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [z(x_i) - z(x_i + h)]^2 \quad (1)$$

Teorik olarak, elde edilen deneysel yarıvariogram yapısını temsil eden yarıvariogram modelinin

belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için öncelikle teorik yarıvariogram modelleri ve parametreleri iyi bilinmeli, en uygun model ve parametreler seçilerek ortalama yarıvariogram modeli fonksiyonel olarak belirlenmelidir (Şekil 3).



Şekil 3. Küresel tip teorik yarıvariogram modeli ve parametreleri [13]

Elde edilen bu eğriden yararlanılarak, incelenen bölgesel değişkenin uzaysal değişimi hakkında önemli bilgi elde edilebilir [6]. Yarıvariogram fonksiyonu, bölgesel değişkenin çeşitli özelliklerinin sayısal olarak belirlenmesinin yanında, örneklenmemiş noktalardaki bilinmeyen değerlerin kestirimlerinde de kullanılabilir. Bu amaca hizmet eden kriging, bölgesel değişkenlerin örneklenmemiş noktalarının kestirimlerinde en iyi ve yansız bir tahmin edici olarak kullanılır. Kriging blok veya bir noktanın kestirimini minimum varyansla tahmin eden en iyi yöntemdir. Kriging kestirimi için; $Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_N)$ N adet veri olsun, $Z(x_i)$ değişkeninin lineer bir

fonksiyonunu belirlemek ve x_0 noktasındaki değer veya x_0 merkezli bir alan içerisindeki ortalama alansal değer tahmin edilmek istensin. Çok sayıda eşitliğe kaçmadan nicelik tahminin eşitliği genel olarak şu şekilde verilebilir [4].

$$Z_V = \frac{1}{V} \int_V Z(x) dx \quad (2)$$

Burada V hacmi nokta kestirimlerinde bir noktayı temsil etmektedir. Bu kestirimleri yapabilmek için verilerimizin bir ağırlıklı ortalamasını ele almamız gerekir. Genel olarak kestirim işlemi, bilinen değerlerin ağırlıklı ortalaması alınarak yapılır (Eşitlik 3).

$$Z_V^*(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) \quad (3)$$

Burada;

- Z_V^* : x_0 noktasında kestirim yapılan değeri,
 $Z(x_i)$: x_0 noktasının kestiriminde kullanılacak gözlemlerin değerini,
 λ_i : Değişkenin değerlerine verilecek ağırlıkları ifade etmektedir.

Genel problemimiz ise ağırlık faktörü olan λ_i 'yi en iyi yolla belirlemek olacaktır. Burada ağırlık faktörü iki amaç doğrultusunda seçilmelidir,

- i. Yansızlık için $E[Z_V^* - Z_V] = 0$, bu şartı sağlayabilmemiz için Eşitlik (3)'deki ifadede $\sum \lambda_i = 1$ olmalıdır (Burada, Z_V^* kestirim değeri, Z_V ise gerçek fakat bilinmeyen değeri ifade etmektedir),
- ii. Minimum varyans için $\text{Var}[Z_V^* - Z_V] = \text{minimum}$ olmalıdır (Burada belirtilen varyans kriging varyansı olarak bilinir). Genel olarak kriging tahmin edicilerine göre kriging yöntemleri; ortalama (m) tahmin edicisi bilinmeden yapılan kriging "ordinary kriging (OK)" ve kriging tahmin edicisi ortalama (m)'nın bilinmesiyle yapılan kriging "simple kriging, (SK)" olarak tanımlanırlar [11].

2. ORDINARY KRIGING KESTİRİM TEKNİĞİ

Eğer $Z(x)$ ortalama değer (m) ile durağan ise; $E[Z(x_i)] = m$ ve böylece $E[Z_V] = m$ olmalıdır. Bu şarta göre;

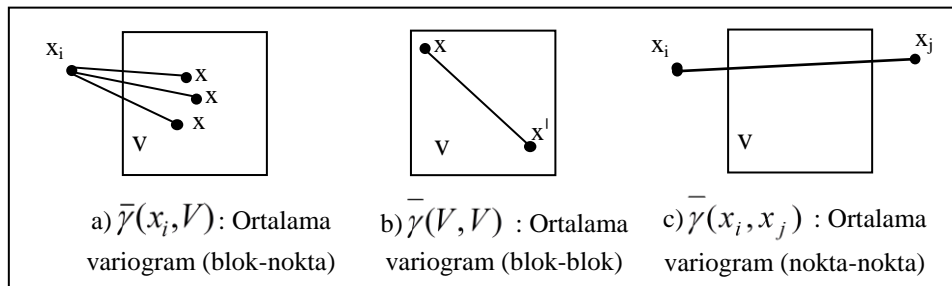
$$E\left[\sum \lambda_i Z(x_i) - Z_V\right] = \sum \lambda_i m - m = m \left[\sum \lambda_i - 1\right] = 0 \quad (4)$$

Eşitlik (4)'den görüleceği üzere yansızlık koşulunun sağlanabilmesi için $\sum \lambda_i = 1$ olmalıdır. Hata varyansı $[Z_V^* - Z_V]$ variogram bağıntıları kullanılarak hesaplanabilir.

$$= 2 \sum_i \lambda_i \bar{\gamma}(x_i, V) - \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i, x_j) - \bar{\gamma}(V, V) \quad (5)$$

Burada;

- $\bar{\gamma}(V, V)$: x ve x' arasındaki ortalama variogram (blok-blok),
 $\gamma(x_i, x_j)$: x_i 'den x_j 'ye ortalama variogram (nokta-nokta),
 $\bar{\gamma}(x_i, V)$: x_i ve V hacmi arasındaki ortalama variogram (nokta-blok) olarak alınmıştır (Şekil 4), [10].



Şekil 4. a) blok-nokta, b) blok-blok, c) nokta-nokta ortalama variogramların şekilsel gösterimi [8]

Ağırlık katsayıları toplamının 1'e eşit çıkması şartı altında, kestirim varyansını (Eşitlik 5) minimize edebilmek için Lagrange çarpanları " μ " ele alınmıştır.

$$\phi = \text{Var}(Z_V^* - Z_V) - 2\mu \left[\sum \lambda_i - 1\right] \quad (6)$$

Eşitlik (6) incelendiğinde ağırlık katsayıları (λ_i) toplamı 1'e eşit çıkması gerektiğinden dolayı,

Lagrange çarpanları (μ) 'nın $[\sum \lambda_i - 1]$ ile çarpılması sonucunda 0 elde edileceğinden “ μ ” etkisiz eleman olacak fakat denklem sistemimizin çözümüne ve λ_i 'lerin bulunmasına imkan sağlayacaktır.

Bu koşullar altında denklemin çözümü “Lagrange çarpanları” yöntemiyle yapılacak olursa kriging denklem sistemi olarak bilinen Eşitlik (7) takımı elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_j \gamma(x_i, x_j) + \mu &= \bar{\gamma}(x_i, V) \quad i=1,2,3,\dots,N \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Kriging varyansı olarak bilinen minimum varyans ise Eşitlik (8) ile elde edilebilir.

$$\sigma^2_K = \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{\gamma}(x_i, V) - \bar{\gamma}(V, V) + \mu \quad (8)$$

Herhangi bir x_0 noktasının kestiriminde N adet veri kullanılıyorsa, bu iki koşul N+1 adet doğrusal denklemler sistemine yol açacaktır. Yukarıdaki Eşitlik (7) sistemini nümerik olarak çözebilmek için matris formunda gösterilirse, aşağıdaki şekle dönüşür (Eşitlik 9).

A matrisinin bir kez tersinin alınıp C vektörüyle çarpılması sonucu ağırlık katsayıları (λ_i)'ler elde edilebilir (Eşitlik 10). Elde edilen ağırlık katsayıları ile Eşitlik (3) sayesinde kestirim değeri bulunabilir. Yapılan kestirimin varyansı (kriging varyansı, σ^2_K) ise Eşitlik (11) sayesinde hesaplanabilir.

$$A = \begin{bmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \gamma_{1,3} & \dots & \dots & \dots & \gamma_{1,N} & 1 \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \gamma_{2,3} & \dots & \dots & \dots & \gamma_{2,N} & 1 \\ \gamma_{3,1} & \gamma_{3,2} & \gamma_{3,3} & \dots & \dots & \dots & \gamma_{3,N} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ \gamma_{N,1} & \gamma_{N,2} & \gamma_{N,3} & \dots & \dots & \dots & \gamma_{N,N} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_N \\ \mu \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(x_1, V) \\ \bar{\gamma}(x_2, V) \\ \bar{\gamma}(x_3, V) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{\gamma}(x_N, V) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$B = A^{-1} x C \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2_K &= B^T C - \gamma(V, V) \\ B^T &= B \text{ transpose} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

3. ORDINARY KRIGING İLE NOKTA VE ALANSAL KESTİRİMLER

Eşitlik (6)'ye göre “ Z_v^* ” x_0 noktasındaki tahmini değer veya x_0 merkezli bir alan içerisindeki ortalama alansal tahmini değer olarak isimlendirilmiştir. Madencilik uygulamaları düşünülecek olursa, x_0 noktasındaki kestirim yapılacak değer bir sondaj değeri veya başka bir

değişken olabilmektedir. Kestirimi yapılacak x_0 noktasına göre kriging interpolasyon tekniği 3 şekilde uygulanabilir. Örneğin; bir maden yatağının x_0 noktasındaki değer kestirimi “noktasal (point) kriging” olarak isimlendirilebilir, x_0 noktası merkezli bir maden alanının ortalama sondaj değerinin kestirimi ise “alansal kriging” olarak isimlendirilebilir, x_0 noktası merkezli bir maden bloğunun ortalama değerinin kestirimi ise “hacimsel (blok) kriging” olarak isimlendirilebilir. Noktasal kestirimler ve kestirim varyansı Eşitlik (7) ve (8) sayesinde kolayca bulunabilir. Alansal ve blok kestirimlerinin yapılması ve varyanslarının bulunması ise yine yarıvariogram fonksiyonları yardımıyla yapılabilir. Bunun için bir maden sahası içerisindeki “x” merkezli kestirim yapılacak

bir “V” alanını, kendisinden daha küçük “ x_j ” merkezli “N” adet küçük “v” alanına böldüğümüzü farz edelim ve bu kestirimde kullanılacak “K” adet gözlem değerini “ g_i ” ile ifade edelim (Şekil 5).

V alanının x merkezli ortalama kestirimini ve varyansını bulmak için Şekil 4’te anlatılan 3 adet ortalama yarıvariogramın hesaplanması gereklidir. Bunların hesabı aşağıdaki aşamaların takibi ile mümkündür.

1. “ g_i ” noktaları ile diğer “ g_i ” noktaları arasında oluşabilecek mümkün çiftlerin yarıvariogramı “ $\gamma(g, g)$ ” bulunur. Bulunan bu yarıvariogram değerleri 1. satırdan N. satıra sırasıyla Eşitlik (9)’daki A matrisi şeklinde gösterilir.

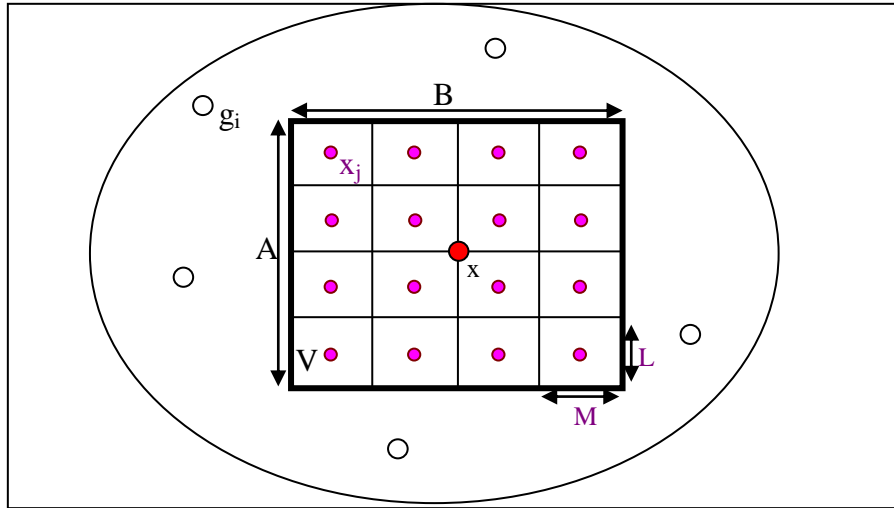
2. “ x_j ” noktaları ile kestirimde kullanılacak “ g_i ” gözlem noktalarından bir tanesi arasındaki ortalama yarıvariogram “ $\bar{\gamma}(x_j, g)$ ” şeklinde olsun ve “ B_i ” şeklinde ifade edilsin. “ B_i ” bulunurken şu aşamalar izlenmelidir.

$$B_i = \sum_{j=1}^N \frac{1}{V} \left[\gamma(x_j g_i) v_j + \gamma(x_j g_i) v_j + \gamma(x_j g_i) v_j + \dots + \gamma(x_N g_K) v_N \right] \quad (12)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, K$

- Küçük alanlar (v_j) = $M_j \times L_j$ olacak şekilde hesaplanmalıdır,
- Büyük alan (V) = $A \times B$ olacak şekilde hesaplanmalıdır,
- Her bir “ x_j ” için ortalama variogram “ $\bar{\gamma}(x_j, g)$ ” şu şekilde hesaplanır. K adet “ g_i ”den bir tanesi seçilir ve bu “ g_i ” ile sırasıyla “N” adet “ x_j ” merkezli alan arasındaki yarıvariogram değerleri hesaplanır ve küçük alan (v_j) ile çarpılır. Bu işlem her “ x_j ” için tekrar edildikten sonra “ $\sum_{j=1}^K \gamma(x_j g) v_j$ ” toplamı

bulunur. Elde edilen toplam büyük blok alanı (V)’ye bölünürse, ortalama “ $\bar{\gamma}(x_j, g)$ ” elde edilmiş olur (Eşitlik 12). Elde edilen bu değer Eşitlik (9)’daki C vektörünün 1. satırını temsil etmektedir. Bu işlem her “ g_i ” için “K” kez tekrar edilir ise Eşitlik (9)’daki “C” vektörü elde edilmiş olur.



Şekil 5. Kestirimi yapılacak “V” alanı

3. Büyük blok “V” içerisindeki “ x_j ” merkezli küçük alan “v”nin diğer “ x_j ” noktaları arasındaki ortalama yarıvariogramı $\gamma(x_i, x_j)$ şeklinde göstereyim ve “ x_j ”lerin ortalama yarıvariogramını

da “ $\bar{\rho}$ ” şeklinde ifade edilmiş olsun. $\bar{\rho}$ bulunurken şu aşamalar izlenmelidir.

- Küçük alan “(v)”ların merkezi “ x_j ” noktaları ile diğer “ x_j ” noktaları arasındaki yarıvariogram

değerleri bulunur. Bu işlem her bir “ x_j ” noktası için kendisiyle olan yarıvariogram değerinin de hesaplanması dahil “ $N \times N$ ” kez tekrar edilir ve toplamları alınır. Elde edilen toplamın “ $N \times N$ ” e bölünmesi suretiyle “ $\bar{\rho}$ ” elde edilebilir (Eşitlik 13).

$$\bar{\rho} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \gamma(x_i, x_j) \quad j=1,2,3,\dots,N \quad (13)$$

4. Eşitlik (5) yardımıyla elde edilmiş “ B ” vektörü (ağırlık katsayıları, λ_i) ile Eşitlik (12) yardımıyla elde edilmiş “ C ” vektörünün çarpılıp toplanmasıyla blok-blok toplam ortalama yarıvariogram değeri elde edilmiş olur. Elde edilen toplam ortalama yarıvariogram “ ρ_{i0} ” şeklinde ifade edilir. “ ρ_{i0} ” Eşitlik (14) ile hesaplanabilir,

$$\rho_{i0} = \sum_{i=1}^{K+1} \lambda_i B_i \quad (14)$$

Bu durumda,

▪ Yapılacak x merkezli bir alansal kestirim $g^*(x)$, Eşitlik (15) yardımıyla hesaplanabilir.

$$g^*(x) = \sum_{i=1}^K \lambda_i g(i) \quad (15)$$

▪ $g^*(x)$ alansal kestirimi için “ordinary kriging kestirim varyansı, σ_{ok}^2 ” Eşitlik (16) yardımıyla hesaplanabilir.

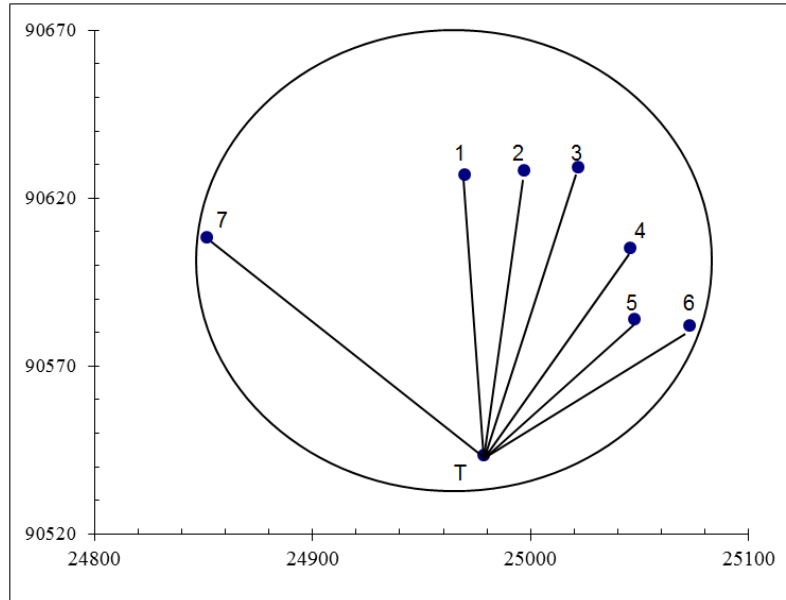
$$\sigma_{ok}^2 = \rho_{i0} - \bar{\rho} \quad (16)$$

Yapılacak bir hacimsel (blok) kestirimin alansal kestirimlerden bir farkı olmayıp alan hesapları yerine hacim hesapları esas alınarak ortalama yarıvariogramlar bulunabilir.

4. UYGULAMA

4.1. Nokta Kestirimi

Şekil 6’da verilen T noktasının değeri, etrafındaki yedi örnek değeri kullanılarak aşağıda verilen yarıvariogram parametrelerine göre ordinary kriging interpolasyon tekniği kullanılarak kestirim yapılacak olsun. Noktalara ilişkin gözlenen değerler ve koordinatlar Çizelge 1’de verilmiştir.



Şekil 6. Kestirimi yapılacak T noktası ve kestirimde kullanılacak etki alanı içerisinde kalan yedi örneklenmiş nokta

Çizelge 1. Kestirimi yapılacak T noktası ve etki alanı içerisinde belirlenmiş olan yarivariogram parametreleri

Örnek Değerleri				Yarivariogram Parametreleri			
No	X-koord.	Y-koord.	Değer(g _i)	Model	C ₀	C ₁	Etki Uzaklığı
1	24970,000	90627,000	56,980	Küresel	0,5	4	120
2	24997,000	90628,000	53,880				
3	25022,000	90629,000	53,640				
4	25046,000	90605,000	57,220				
5	25048,000	90584,000	57,300				
6	25073,000	90582,000	57,540				
7	24851,710	90608,330	59,060				
T	24978,530	90543,450	?				

1) Bütün noktaların kestirimi yapılacak olan T “h_{i,j}” pisagor bağıntısı (Şekil 2) yardımıyla noktasına “h_{i0}” ve birbirlerine olan uzaklıkları bulunmuş ve Çizelge 2’ de gösterilmiştir.

Çizelge 2. Gözlem çiftleri arasındaki uzaklıklar

h _{i,j}	1	2	3	4	5	6	7
1	0,000	27,02	52,04	79,12	89,07	112,40	119,75
2	27,02	0,000	25,02	54,13	67,36	88,84	146,62
3	52,04	25,02	0,000	33,94	51,97	69,35	171,54
4	79,12	54,13	33,94	0,000	21,10	35,47	194,32
5	89,07	67,36	51,97	21,10	0,000	25,08	197,79
6	112,40	88,84	69,35	35,47	25,08	0,000	222,85
7	119,75	146,62	171,54	194,32	197,79	222,85	0,0000
T	83,984	86,543	95,960	91,326	80,438	102,032	142,452

2) Bütün örnek çiftleri arasındaki uzaklığa bağlı $\gamma(h_{i,j})$ değerleri Çizelge 1’de verilen yarivariogram parametrelerine bağlı olarak Denklem (8) sayesinde hesaplanmıştır. Bu sonuçlar Eşitlik (18) şeklinde matris formuna dönüştürülmüştür. Eşitlik (18), Denklem (10) sistemindeki A matrisini ifade etmektedir.

$$A = \begin{bmatrix} 0,000 & 1,828 & 2,939 & 3,883 & 4,136 & 4,476 & 4,500 & 1,000 \\ 1,828 & 0,000 & 1,733 & 3,023 & 3,514 & 4,130 & 4,183 & 1,000 \\ 2,939 & 1,733 & 0,000 & 2,152 & 2,936 & 3,582 & 3,235 & 1,000 \\ 3,883 & 3,023 & 2,152 & 0,000 & 1,544 & 2,222 & 1,724 & 1,000 \\ 4,136 & 3,514 & 2,936 & 1,544 & 0,000 & 1,736 & 1,434 & 1,000 \\ 4,476 & 4,130 & 3,582 & 2,222 & 1,736 & 0,000 & -1,167 & 1,000 \\ 4,500 & 4,183 & 3,235 & 1,724 & 1,434 & -1,167 & 0,000 & 1,000 \\ 1,000 & 1,000 & 1,000 & 1,000 & 1,000 & 1,000 & 1,000 & 0,000 \end{bmatrix} \quad (18)$$

3) Yine aynı şekilde kestirimi yapılacak olan nokta ve etki alanı içinde kalan diğer noktalar arasındaki uzaklığa bağlı $\gamma(h_{i0})$ değerleri Denklem (8) yardımıyla hesaplanarak Eşitlik (19)’da ki vektör

formuna dönüştürülmüştür. Eşitlik (19), Eşitlik (10) sistemindeki “C” vektörünü ifade etmektedir.

4) Denklem (11) gereği “A” matrisinin tersi bulunmuş, Eşitlik (20) şeklinde belirtilmiştir.

5) Denklem (11) kullanımı ile elde edilen “A⁻¹” matrisin tersi ile “C” vektörün çarpımı sonucu ağırlık katsayıları bulunmuştur. Elde edilen B vektörünün transposu alınarak ve Eşitlik (21) formunda gösterilmiştir.

6) Denklem (3) gereği, Eşitlik (21)’de elde edilmiş ağırlık katsayıları “λ_i” ile o ağırlık katsayısına

karşılık gelen örnek değerleri “g_i” çarpılmış ve çarpımlarının toplamları alınarak T* kestirim değeri bulunmuştur.

$$C = \begin{bmatrix} 4,0136 \\ 4,0770 \\ 4,2753 \\ 4,1847 \\ 3,9195 \\ 4,3722 \\ 4,2769 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0,30 & 0,23 & 0,02 & -0,01 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,31 \\ 0,23 & -0,48 & 0,22 & 0,02 & 0,03 & -0,06 & 0,04 & 0,11 \\ 0,02 & 0,22 & -0,43 & 0,16 & 0,01 & 0,04 & -0,03 & 0,12 \\ -0,01 & 0,02 & 0,16 & -0,49 & 0,22 & 0,10 & -0,01 & 0,06 \\ 0,02 & 0,03 & 0,01 & 0,22 & -0,46 & 0,10 & 0,08 & 0,15 \\ 0,02 & -0,06 & 0,04 & 0,10 & 0,10 & 0,29 & -0,49 & 0,08 \\ 0,02 & 0,04 & -0,03 & -0,01 & 0,08 & -0,49 & 0,38 & 0,16 \\ 0,31 & 0,11 & 0,12 & 0,06 & 0,15 & 0,08 & 0,16 & -2,50 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$B^T = [0,3423 \quad 0,1289 \quad 0,0537 \quad 0,0354 \quad 0,2964 \quad 0,0650 \quad 0,0784 \quad 1,6135] \quad (21)$$

$$T^* = \left[\begin{array}{l} (0,3423 * 56,98) + (0,1289 * 53,88) + (0,0537 * 53,64) + (0,0354 * 87,22) + \\ (0,2964 * 57,3) + (0,065 * 57,540) + (0,0784 * 59,060) \end{array} \right]$$

$$T^* = 56,70367$$

7) Eşitlik (12) gereği ağırlık katsayıları “B^T” ile “C” vektörü çarpılarak toplanmış ve yapılan kestirim varyansı σ²_{ok} bulunmuştur

(Eşitlik (12)’deki “γ(V, V)” değeri noktasal kestirim yaptığımız için sıfırdır).

$$\sigma_{ok}^2 = [0,3423 \quad 0,1289 \quad 0,0537 \quad 0,0354 \quad 0,2964 \quad 0,0650 \quad 0,0784 \quad 1,6135]^* \begin{bmatrix} 4,0136 \\ 4,0770 \\ 4,2753 \\ 4,1847 \\ 3,9195 \\ 4,3722 \\ 4,2769 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ok}^2 = \left[\begin{array}{l} 0,3423 * 4,0136 + 0,1289 * 4,077 + 0,0537 * 4,2753 + 0,0354 * 4,1847 + \\ 0,2964 * 3,9195 + 0,0650 * 4,3722 + 0,0784 * 4,2769 + 1,6135 * 1 \end{array} \right]$$

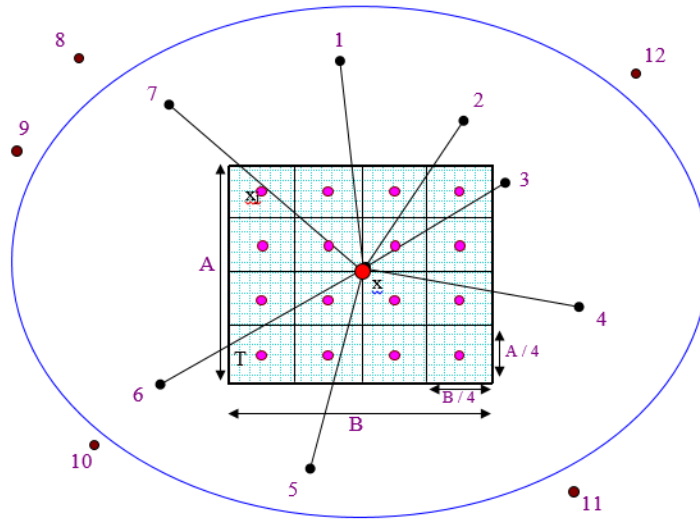
$$\sigma_{ok}^2 = 5,67146$$

Yukarıdaki örnekte de görüleceği üzere her nokta için bu işlemler yapıldığı düşünülürse, bilgisayardan yararlanılması kaçınılmaz olur.

4.2. Blok Kestirimi

Blok veya alansal kestirimler noktasal kestirimlerden farklı olarak bir noktayı değil bir alanın ortalama değerini ifade eder. Alansal

kriging kestirimi ve programlanmasında temel alınan işlem sırasını açıklamak için bir örnek verecek olursak; Şekil 7’de verilen T alanı etrafında değerleri bilinen 12 gözlem noktasından etki alanı içerisinde kalan 7 tanesi ile kestirim yapılacak olsun. Kestirime ve kestirim varyansına ilişkin programlama aşamaları şu sıra ile elde edilmiştir.



Şekil 7. Kestirimi yapılacak T alanı ve kestirimde kullanılacak etki alanı içerisinde kalan yedi örneklenmiş nokta

1) Elips içerisine düşen bütün örnek noktaların birbirlerine olan uzaklıkları pisagor bağıntısı yardımıyla bulunmuştur.

2) Bütün örnek çiftleri arasındaki mesafeye bağlı $\gamma(g_i, g_j)$ değerleri yarıvariogram aşamasında belirlenmiş yarıvariogram parametrelerine bağlı olarak bulunmuş ve matris formunda belirtilmiştir. Bulunan bu sonuçlar oluşturacağımız Eşitlik (9) sistemindeki A matrisini ifade etmektedir.

3) A x B boyutlarındaki T alanı istenilen aralıklarla gridlere bölünür. 4x4 gridlere böldüğümüzü farz edersek bu alan üzerinde 16 adet grid noktası olacaktır. Elde edilen bu grid noktalarının x, y ve z koordinatları bulunmuştur. Her bir grid blok içinde küçük bir alanı temsil eder. Bu küçük blokların boyutları, bloğun boyutlarının istenilen grid

sayısına bölünmek suretiyle bulunabilmektedir. Örneğimiz için bu boyutlar küçük bloğun X eksenini boyu B/4, Y eksenini boyu ise A/4 olacaktır. Dolayısıyla küçük bloğun alanı A/4*B/4 olacaktır.

4) Elde edilen bu koordinatlarla elips içerisine düşen örneklerden bir tanesi seçilerek aralarındaki yarıvariogram değerleri sırasıyla bulunmuştur. Eşitlik (12) gereği her "x_j" noktası için bulunan yarıvariogram değeri, o noktanın temsil ettiği küçük bloğun alanıyla çarpılmıştır. Bu işlem seçtiğimiz örnekte büyük blok alanımız içinde 16 nokta olduğuna ve elipsimiz içinden de 1 örnek seçtiğimize göre 16x1=16 kez yapılır. Bir örnek için bulunan bütün bu yarıvariogram değerlerinin toplamı büyük bloğun alanına bölündüğü zaman blok ile seçilen örnek arasındaki ortalama yarıvariogram bulunur. Bulunan bu sonuç

oluşturacağımız Eşitlik (9) sistemindeki “C” vektörünün 1. satırını temsil etmektedir. Kalan diğer yedi nokta ile aynı işlemler tekrarlanırsa “C” vektörünü elde ederiz.

5) Elde edilen matrisin tersi alınmış ve A^{-1} matrisi olarak isimlendirilmiştir.

6) Eşitlik (10) kullanımı ile elde edilen “ A^{-1} ” matrisin tersi ile “C” vektörün çarpımı sonucu ağırlık katsayıları bulunmuştur.

7) Eşitlik (3) gereği, elde edilmiş ağırlık katsayıları “ λ_i ” ile o ağırlık katsayısına karşılık gelen örnek değerleri “ g_i ” çarpılmış ve çarpımlarının toplamları alınarak T* kestirim değeri bulunmuştur.

8) Yapılan kestirime ilişkin hatayı yani blok varyansını bulmak için blok içindeki her bir nokta ile blok içindeki diğer noktalar arasındaki yarivariogram değerleri bulunmuş ve toplamları alınmıştır. Seçtiğimiz örnekte 16 adet grid noktası olduğuna göre her bir nokta ile geriye kalan 15 nokta arası yarivariogram ve birde kendisiyle olan yarivariogramını bulacak olursak toplam 16×16 tane yarivariogram değeri elde edilir. Eşitlik (13) yardımıyla elde edilen toplam yarivariogram değeri 16×16 yani toplam yarivariogram sayısına bölünmek suretiyle bloğun kendi içindeki

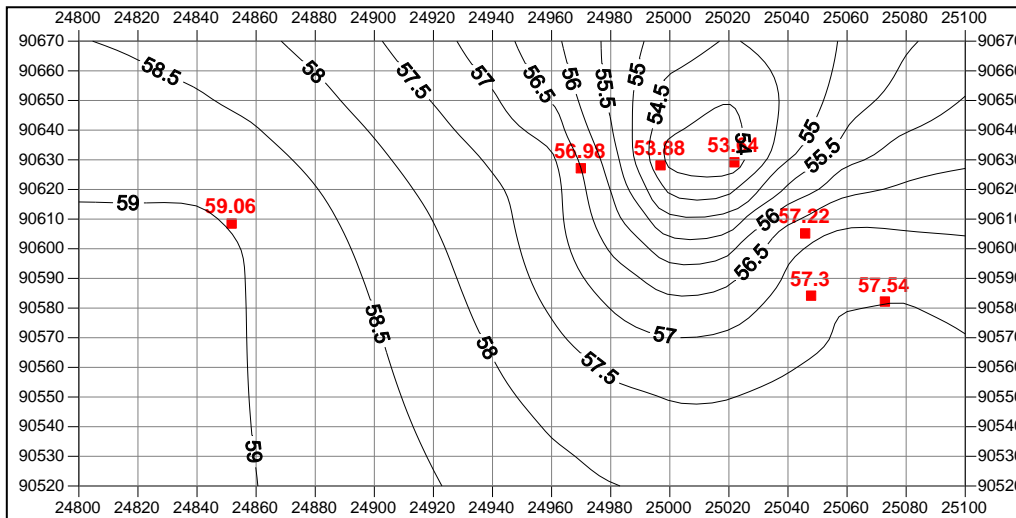
noktaların arasındaki ortalama yarivariogramı bulunmuştur.

9) Daha sonra, Eşitlik (14) gereği, bir önceki elde ettiğimiz ağırlık katsayıları (λ_i) ile C vektörü çarpılarak bloğun toplam ortalama yarivariogramı bulunmuştur.

10) Kestirim varyansı, “ σ_{ok}^2 ” Eşitlik (16) yardımıyla hesaplanmıştır. Buna göre toplam ortalama yarivariogramdan bloğun kendi içindeki ortalama yarivariogramı çıkarılmış sonuçta yapılan blok kestirimin varyansı bulunmuştur.

4.3. Kestirimlerin Haritalanması

Şekil 6’da koordinatları ve örneklenmiş noktaları verilen alanda $g(i)$ tenör dağılım haritasını hazırlamak için $g(i)$ değişkenin yarivariogram analizleri yapılmış ve elde edilen deneysel $g(i)$ yarivariogram yapılarına karşılık teorik yarivariogramlardan biri uydurulmaya çalışılmış, en uygun modelin Şekil 3’te verilen küresel tip model olduğu ve parametrelerinin ise Kontrolsüz Etki (C_0) 0,5, Eşik Değer (C) 4, Etki Uzaklığı 120 m olduğu saptanmıştır. Daha sonra Şekil 6’da verilen alan $20 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ boyutlarında 160 adet gride bölünmüş, grid noktalarının $g^*(i)$ değerleri ordinary kriging ile kestirim yapılarak haritalanmıştır (Şekil 8).



Şekil 8. Kestirim değerlerinin dağılım haritası

5. SONUÇLAR

Bu çalışma ile örneklenmemiş noktadaki tenör değerlerinin kestirimi ordinary kriging interpolasyon tekniği ile değerlendirilmiştir. Kriging ile yaptığımız kestirimin doğruluğu veya geçerliliği aşağıdaki faktörlere bağlıdır;

- Yapılan kestirimlerin doğruluğu teorik yarıvariogram modeli ve model parametrelerinin doğru seçimi ile paraleldir. Dolayısıyla teorik yarıvariogram modelleri ve parametreleri iyi bilinmeli, en uygun model ve parametreler seçilerek ortalama yarıvariogram modeli fonksiyonel olarak belirlenmelidir.
- Düzenli aralıklarla örneklenmiş veriler daha temsili olacak ve deneysel yarıvariogramlardaki gözlem çiftlerinin sayısını artıracığından, bölgesel değişkenin dağılımı hakkında daha fazla bilgi edinmek için örneklemenin sistematik yapılması tercih edilmelidir.
- Kestirimi yapılacak nokta veya blokların, örneklenmiş noktalara yakın olması veya etrafıca çevrilmiş olması beklenir. Dolayısıyla örneklenmiş noktalardan uzaklaştıkça varyans artacağından kriging arama elipsi içine düşen örnek sayısının yeterli büyüklükte olması beklenir. Örnek sayısı arttıkça kestirimlerin doğruluğu da artacaktır.

Kriging interpolasyon yöntemi klasik istatistik yöntemlerden farklı olarak, örnekler arası değişkenliği uzaklığa bağlı olarak ele almakta ve kestirimlere ait hata varyansı üretebilmektedir. Diğer yandan, variogram fonksiyonlarının modellenmesindeki esneklik ve kriging denklem sistemlerinin çözümündeki şeffaflık (transparency) bu yöntemin üstünlükleri olarak kayımıza çıkmaktadır.

6. KAYNAKLAR

1. Krige, D.G., 1951. A Statistical Approach to Some Basic Mine Valuation Problems on The Witwatersrand, J. of the Chem., Metal. and

- Mining Soc. of South Africa, vol. 52, p.119-139.
2. Matheron, G., 1963. Principles of Geostatistics, Economic Geology, vol. 58, no. 8, p.1246-1266.
3. Oliver, M.A., Webster, R., 2014. A Tutorial Guide to Geostatistics: Computing and Modelling Variograms and Kriging, Catena, 113, p. 56-69.
4. Webster, R., Oliver, M.A., 2007. Geostatistics for Environmental Scientists. John Wiley & Sons.
5. Clark, I., Harper, W.V., 2000. Practical Geostatistics 2000; Ecosse North America Lie. Columbus Ohio, USA, p.342.
6. Cressie, N., 1993. Statistics for Spatial Data, Revised Edition; John Wiley & Sons Press, New York, USA, p. 928.
7. Wackernagel, H., 2010. Multivariate Geostatistics, 3rd Edition; Springer-Verlag, Deutch, p. 387.
8. Srivastava, R.M., 2013. Geostatistics: A Toolkit for Data Analysis, Spatial Prediction and Risk Management in the Coal Industry, International Journal of Coal Geology, vol.112, p.2-13.
9. Dag, A., Mert, B.A., 2008. Evaluating Thickness of Bauxite Deposit Using Indicator Geostatistics and Fuzzy Estimation, Resource Geology, 58(2), p. 188-195.
10. Mert, B.A., Dag, A., 2015. Development of a GIS-based Information System for Mining Activities: Afsin-Elbistan Lignite Surface Mine Case Study, International Journal of Oil, Gas and Coal Technology 23, 9(2), p. 192-214.
11. Chiles, J. P., Delfiner, P., 2009. Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty, vol. 497. John Wiley & Sons.
12. Deutch, C.V., Journé, J.-L., 1997. GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide, 2nd Edition; Oxford University Press, New York, USA, p.369.
13. Cressie, N., 1988. Spatial Prediction and Ordinary Kriging, Mathematical Geology, 20(4), p.405-421.